泛函导论 Erwin

2.2

2.2.2 是三角形两边之差不能大于第三边。

2.2-2 到 2.2-5 可以说解惑了，那几个度量如果是这样定义出来的那就合理了，涉及的几个范数如果以向量长度的视角来看那就很自然了。做欧几里得空间的问题时，向量和点是没分别的，现在当然也是，只是这本书的叙事比较凑合，容易给读者造成误会。

所以完备化的叙述就放在之后，2.2-8 和 2.2-9 提供的视角更加欧几里得风格了哈哈。

习题

1. $d(0,x)=d(x,0)=\|x\|$
2. 显然
3. 如上一节我所述
4. 反之则会在 $\vec{0}$ 出有不必要的多值性，也会违反 N_4；$N_3 \to \|-x\|=\|x\|$，将 $x=x, y=-x$ 代入 N_4 可得 $0 \leqslant 2\|x\|$
5. 可以用 $x=x, y=-y, z=0$ 从度量的三角不等式推出来，注意 $\|x\|=\|-x\|$
6. 无聊，略
7. 可以用 5. 讲的方法做出来
8. 正好覆盖 6。第二个如 7. 所述；第一个显然；最后一个也显然。
9. 显然。注意 $|x(t)+y(t)| \leqslant |x(t)|+|y(t)|$
10. 视错觉下很容易把 $\|x\|_2$ 看成不圆，实际很圆哈哈。
11. 注意 $\alpha x+(1-\alpha)y=y+\alpha(x-y)$，所以实际上图 2-6 就是凸集这个概念真正想表达的。至于这道题的证明比较显然，要用到 N_3 和 N_4.
12. 前三个 N 其实都满足，第四个可以找反例，比如 $(1,1)$，我感觉是在引发我们对单位圆凸性和三角不等式关联的兴趣。
13. 首先如果想 2.2.1 那样从范数导出离散度量，那么这个范数的值域是 $\{0,1\}$，但进一步推理可以发现这个度量只能对 $d(x,0)=\|x-0\|$ 的情况输出 1，违反了离散度量的定义。
14. 实际上在说 $\|x-y\|+1=\overline{\|x-y\|}$，也就是 $\overline{\|x\|}=\|x\|+1$，然而这并不能称为一个范数，比如 N_2 就不满足。
15. 相当于翻译一下了。毕竟 $m \in M$ 都可以翻译成 $m=x-y$

嗯哼我居然忘了平移不变性的两个公式。

参考文献